Topic 1. Example 9. The equations

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0&5\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix} \qquad \text{give} \qquad \begin{array}{l}x_1=1-2x_2-5x_5,\\ x_3=2-6x_5,\\ x_4=3-7x_5,\\ \text{no restrictions on } x_2 \text{ or } x_5.\end{array}$$

So

$$\mathrm{Sol}(Ax=b)=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\\0\end{pmatrix}+\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\0\\-6\\-7\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\\0\end{pmatrix}+\left\{x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-5\\0\\-6\\-7\\1\end{pmatrix}\;\middle|\; x_2,x_5\in\mathbb{Q}\right\}.$$

Let

$$s_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad s_{34}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Then

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0&5\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2&0&5\\0&1&0&0&6\\0&0&0&1&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}s_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0&2&5\\0&1&0&0&6\\0&0&1&0&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}s_{34}s_{23}$$
$$=1_3\cdot x_{14}(2)x_{35}(7)x_{25}(6)x_{15}(5)s_{34}s_{23}=1_3\cdot Q,$$

where $1_3\in M_{4\times5}(\mathbb{Q})$ and $Q\in M_{5\times5}(\mathbb{Q})$ are

$$1_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Q=\begin{pmatrix}1&0&0&2&5\\0&1&0&0&6\\0&0&1&0&7\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}s_{34}s_{23}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&5\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&7\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

In this case

$$Q^{-1}=s_{23}s_{34}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&-5\\0&1&0&0&-6\\0&0&1&0&-7\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-2&-5\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&-6\\0&0&1&0&-7\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$